LinAlg PVK HS20 06.01.21: Notizen zur Aufnahme

Zeitplan:

Morgen:

- QR mit Givens / Householder
- Untervektorräume
- Basis, Kern & Bild
- Gram-Schmidt
- Verallgemeinerte Norm & Skalarprodukt
- $A^k x$ (Eigenwertproblem)
- Differentialgleichungen 1. Ordn.

Nachmittag:

- Prüfung HS 18
  - ↳ Orthogonalisierung & QR
  - ↳ e^C
  - ↳ Lineare Abbildungen & Abbildungsmatrizen
  - ↳ Basiswechsel
  - ↳ Ausgleichsrechnung mit SVD
  - ↳ Beweisaufgabe (Schur-Zerlegung)
  - ↳ Multiple Choice

QR-Zerlegung mit Givensrotation & Householderspiegelung:

Beispiel Givens:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \underset{a_{21}}{\underbrace{\boxed{-1}}_{\doteq 0}} & 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}$$

$\underline{\underline{Q}}$ orthogonal, $\underline{\underline{R}}$: rechte obere Dreiecksmatrix

i) $a_{21} \to 0$

ii) $\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$$\left| \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{a_{31}}{\boxed{\cdot}} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \right. \longrightarrow \underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

iii)

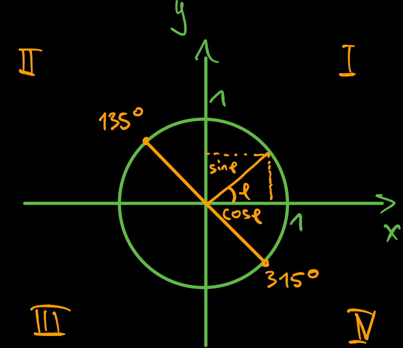
$$\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \cos\theta - \sin\theta & 3\cos\theta + 4\sin\theta \\ \underbrace{\boxed{-\sin\theta - \cos\theta}}_{\doteq 0} & -3\sin\theta + 4\cos\theta \end{bmatrix}$$

iv) $\cos\theta = -\sin\theta$

$$\cos 315° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 315° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 0° = 0 = \tfrac{\sqrt{0}}{2} = \cos 90°$$
$$\sin 30° = \tfrac{1}{2} = \tfrac{\sqrt{1}}{2} = \cos 60°$$
$$\sin 45° = \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$$
$$\sin 60° = \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$$
$$\sin 90° = 1 = \tfrac{\sqrt{4}}{2} = \cos 0°$$



v) $$G \cdot A = R \quad , \quad A = Q R$$

$$A = G^T R \quad \Rightarrow \quad Q = G^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

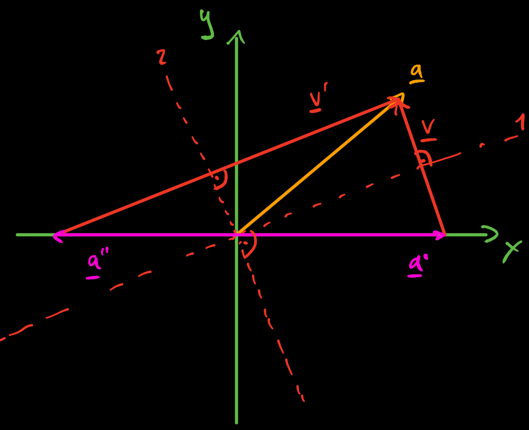
$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

vi) i) – v) für das nächste Element wiederholen

$$\Rightarrow G_2 \boxed{\underbrace{(G_1 A)}_{R'}} = R \quad , \quad Q = (G_2 \cdot G_1)^T = G_1^T G_2^T$$

Beispiel Householder:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & * & * \\ 2 & * & * \\ 1 & * & * \end{bmatrix}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=0}, \quad \underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



i) $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ii) $a' = \|a\| \cdot e_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

iii) $v = a + a' = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Projektor

$$\boxed{H = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv} = I - 2uu^T} \quad \Big| \; u = \frac{v}{\|v\|}$$

iv) $u = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

v) $H = \begin{bmatrix} 1 & & \emptyset \\ & 1 & \\ \emptyset & & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{30} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & \emptyset \\ & 1 & \\ \emptyset & & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 10 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -10 & -10 & -5 \\ -10 & 11 & -2 \\ -5 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

vi) $H \cdot A = \begin{bmatrix} -3 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} = R'$, $A' = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix}$

vii) i)-vi) mit $A' = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix}$ (a' = erste Spalte) auf $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow H_2'$

$$\Rightarrow H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{H_2'} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad H_2(H_1 A) = R$$

$$Q = (H_2 H_1)^T = H_1^T H_2^T$$

Untervektorraum & Regeln:

$U \neq \emptyset$ ist ein UVR, falls er eine Teilmenge eines VR ist, und: $\forall a,b \in U$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

(i) $a+b \in U$

(ii) $\alpha \cdot a \in U$

Beispiel: $U = \{ A \in V \mid \boxed{A^T = -A} \}$, $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$

Überprüfen $\forall U_1, U_2 \in U$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $(U_1+U_2)^T = U_1^T + U_2^T = -U_1 - U_2 = -(U_1+U_2)$ ✓

(ii) $(\alpha \cdot U_1)^T = U_1^T \cdot \alpha^T = \alpha U_1^T = -(\alpha U_1)$ ✓

Basis beweisen:

Beispiel: P_3, $C = \{ c^{(1)} = 2,\ c^{(2)} = x^2 + x - 1,\ c^{(3)} = 2x^2 - 5x \}$

1) $1 = \frac{1}{2} c^{(1)}$

$$x = \frac{2c^{(2)} - c^{(3)} + c^{(1)}}{7}$$

$$x^2 = \frac{5c^{(2)} + c^{(3)} + \frac{5}{2}c^{(1)}}{7}$$

C ist ein Erzeugendensystem & minimal, da nur 3 Vektoren & P_3 3-dimensional

$\Rightarrow$ Basis ✓

2)

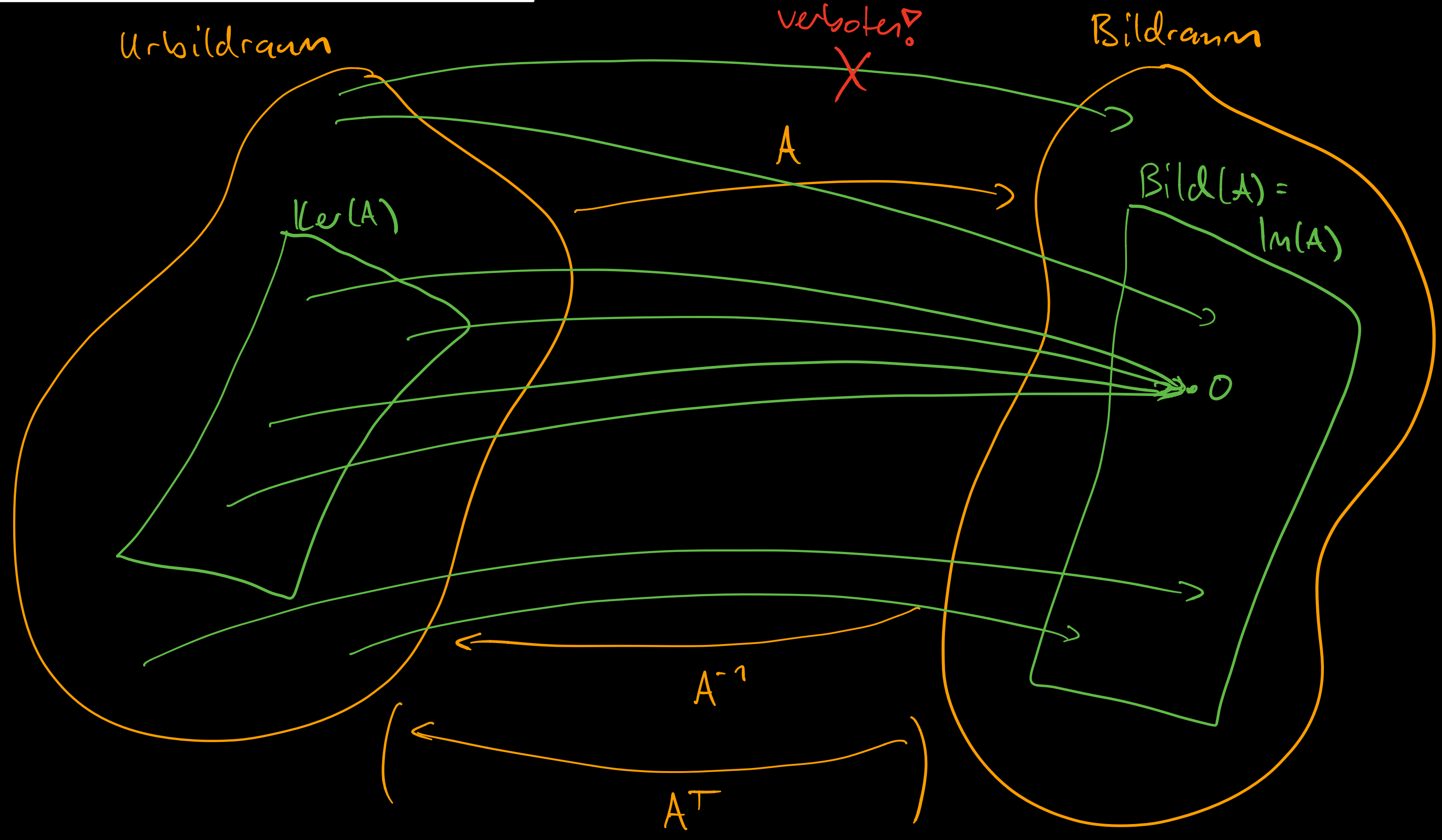
$$\begin{array}{ccc|c} c^{(1)} & c^{(2)} & c^{(3)} & \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \xrightarrow{G.} \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}$$

Rang = 3

$\rightarrow$ lin. unabhängig & genug, da 3 Vektoren für 3-dim.

$\Rightarrow$ ES $\Rightarrow$ Basis

Basis von Kern & Bild:



Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Bild}(A): \ b = Ax = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \ldots$$

Ker(A): $Ax = 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$x_4 = s \in \mathbb{R}$$

$$x_3 = t \in \mathbb{R}$$

$$x_2 = \frac{3s - 3t}{2}$$

$$x_1 = \frac{-x_2 - x_3}{2} = \frac{t}{4} - \frac{3s}{4}$$

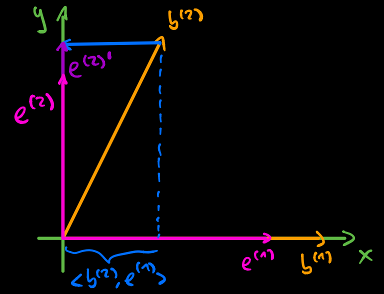
$$\Rightarrow \mathcal{L} = \text{Ker}(A) = \left\{ \frac{1}{4} \begin{bmatrix} t - 3s \\ 6s - 6t \\ 4t \\ 4s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{4}t \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}s \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{Bild}(A) = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren:



(i) $e^{(1)} = \dfrac{b^{(1)}}{\|b^{(1)}\|}$

(ii) $e^{(2)'} = b^{(2)} - \langle b^{(2)}, e^{(1)}\rangle \cdot e^{(1)}$ & $e^{(2)} = \dfrac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|}$

(iii) $e^{(3)'} = b^{(3)} - \langle b^{(3)}, e^{(1)}\rangle e^{(1)} - \langle b^{(3)}, e^{(2)}\rangle e^{(2)}$ & $e^{(3)} = \dfrac{e^{(3)'}}{\|e^{(3)'}\|}$

usw.

Beispiel: $\mathcal{P}_5$ mit $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx$, $\operatorname{span}\{1, 3x^4\}$

Gram-Schmidt:

i) $e^{(1)} = \dfrac{1}{\|1\|} = \underline{1}$

$\|1\| = \sqrt{\langle 1,1\rangle} = \sqrt{\int_0^1 1\,dx} = \sqrt{[x]_0^1} = 1$

ii) $e^{(2)'} = 3x^4 - \langle 3x^4, 1\rangle 1$

$= 3x^4 - \int_0^1 3x^4\,dx = 3x^4 - \left[\frac{3}{5}x^5\right]_0^1 = \underline{3x^4 - \frac{3}{5}}$

$e^{(2)} = \dfrac{e^{(2)'}}{\|e^{(2)'}\|} = \underline{\underline{\frac{15}{4}x^4 - \frac{3}{4}}}$

$\|e^{(2)'}\| = \sqrt{\int_0^1 (3x^4 - \frac{3}{5})^2\,dx} = \sqrt{\int_0^1 \left(9x^8 - \frac{18}{5}x^4 + \frac{9}{25}\right)dx}$

$= \sqrt{\left[x^9 - \frac{18}{25}x^5 + \frac{9}{25}x\right]_0^1} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

Verallgemeinerte Norm:

$$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

$\forall v, w \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\|v\| \geq 0$ & $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ positive Definitheit

(ii) $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ Dreiecksungleichung

Verallgemeinertes Skalarprodukt:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \to \mathbb{R}, \quad (a,b) \mapsto \langle a, b \rangle$$

$\forall x, y, z \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(i) $\langle x, \lambda(y+z) \rangle = \langle x, \lambda y \rangle + \langle x, \lambda z \rangle$

$= \underline{\lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, z \rangle}$

$\langle \lambda x, \lambda y \rangle = \lambda^{2} \langle x, y \rangle$

$\det(\lambda A) = \lambda^{n} \det(A)$

(ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ positive Definitheit

Induzierte Norm: $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle), \quad a \in V$

$$\Rightarrow \|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{symm.?}$$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle_A = x^T A y$ ein Skalarprodukt

$\forall x,y,z \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

i) $\langle x, \lambda(y+z)\rangle \overset{!}{=} \lambda\langle x,y\rangle + \lambda\langle x,z\rangle$

$$x^T A \lambda(y+z) = x^T A(\lambda y + \lambda z) = \lambda x^T A y + \lambda x^T A z \quad \checkmark$$

ii) $\langle x,y\rangle \overset{!}{=} \langle y,x\rangle$

A symm.!

$$x^T A y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ergebnis ist eine Zahl!}}}{=} (x^T A y)^T = y^T A^T x = y^T A x \quad \checkmark$$

iii) $\langle x,x\rangle \geq 0$, $\langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0$

$$x^T A x \geq 0, \quad x^T A x = 0 \iff x = 0$$

$\Rightarrow$ A positiv definit!

Hurwitz-Kriterium: (Nur für symm. Matrizen!)

muss >0 sein für alle Hauptminoren

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{2} & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \det(2) = 2 > 0, \quad \det\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = 6 > 0$$

$\Rightarrow$ A pos. def. nach Hurwitz

$$\Rightarrow x^T A x \geq 0, \quad x^T A x = 0 \iff x = 0 \quad \checkmark$$

A^k – Eigenwertproblem & Diagonalisieren:

$$A^k x = (TDT^{-1})^k x$$ falls A mindestens halbeinfach ist

$$= T D \underbrace{T^{-1} T}_{I} D \underbrace{T^{-1} T}_{I} \dots \underbrace{T^{-1} T}_{I} D T x$$

$$= T D^k T^{-1} x$$

$$\begin{bmatrix} d_1 & & \emptyset \\ & d_2 & \\ \emptyset & \ddots & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & \emptyset \\ & d_2 & \\ \emptyset & \ddots & d_n \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} d_1 & & \emptyset \\ & d_2 \ddots & \\ \emptyset & & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^k & & \emptyset \\ & d_2^k & \\ \emptyset & \ddots & d_n^k \end{bmatrix}$$

$$= T D^k \underbrace{T^{-1} x}_{z}$$

$T^{-1} x = z$

$T z = x$

$$= T D^k z$$

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A^{10} x \overset{?}{=}$$

$$\text{EW: } \det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \qquad Ax = \lambda x$$

Laplac'sche Entwicklungssatz:

$$= -\lambda \cdot \det \begin{bmatrix} -\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} + 2 \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -\lambda & -2 \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda \left[\lambda^2 - 2\lambda - 2 \right] + 2 \left[2\lambda - 2 \right] + \left[2\lambda + 4 \right]$$

$$= -\lambda \left[\lambda^2 - 2\lambda - 2 \right] + 6\lambda = -\lambda \left[\lambda^2 - 2\lambda - 8 \right]$$

$$(\lambda \pm a)(\lambda \pm b)$$

$$= -\lambda (\lambda - 4)(\lambda + 2)$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = -2$

$\lambda_3 = 4$

$$\text{EV: } (A - \lambda I) x = 0$$

$$\lambda_1 = 0: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 \in \mathbb{R} \\ x_2 = x_3 \\ x_1 = -x_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow E_0 = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\lambda_2 = -2: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 = x_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow E_{-2} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\lambda_3 = 4: \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 \in \mathbb{R} \\ x_2 = -x_3 \\ x_1 = x_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow E_4 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{10}x = TD^{10}T^{-1}x = TD^{10}z \qquad Tz = x$$

$$z: \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow z_3 = 0, \; z_2 = 2, \; z_1 = 1 \quad \rightarrow z = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{10}x = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & 1024 & \\ 0 & & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2048 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2048 \\ 2048 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$y' = Ay \overset{\text{Euler}}{\Rightarrow} y(t) = e^{At} y_0$$

gekoppelt
$$\begin{cases} y_1' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n \\ y_2' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1} y_1 + \dots \dots + a_{nn} y_n \end{cases}$$

$$y' = Ay = TDT^{-1} y$$ falls A min. halbeinfach

$$\underbrace{T^{-1} y'}_{z'} = D \underbrace{T^{-1} y}_{z}$$ $T^{-1} y = z$, $Tz = y$

$$z' = Dz$$

$$z_1' = \boxed{d_1 z_1}$$
$$z_2' = d_2 z_2$$
$$\vdots$$
$$z_n' = d_n z_n$$

Euler-Ansatz

$= 0$

$$z_1(t) = e^{d_1 t} c_1 = e^{\lambda_1 t} c_1 \quad \Big| \; [z_1(t)]' = d_1 \underbrace{e^{d_1 t} c_1}_{z_1(t)}$$
$$z_2(t) = e^{d_2 t} c_2$$
$$\vdots$$
$$z_n(t) = e^{d_n t} c_n$$

$$z(t) = \underbrace{e^{Dt}}_{\begin{bmatrix} e^{d_1 t} & & \emptyset \\ & e^{d_2 t} & \\ \emptyset & & \ddots \; e^{d_n t} \end{bmatrix}} z_0, \quad z_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$y(t) = T z(t) = T e^{Dt} z_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \emptyset \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{z_0}$$

EW von A

$$= c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} | \\ a_1 \\ | \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} | \\ a_2 \\ | \end{bmatrix} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \begin{bmatrix} | \\ a_n \\ | \end{bmatrix}$$

EV von A

Anfangswerte von $z(t)$, nicht von $y(t)$!

$c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

↳ Brauchen Anfangswerte oder Randwerte um diese zu bestimmen!

→ AWP

Beispiel:

a) $A = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \\ -9 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $y' = Ay$

b) AWP: $\lim_{x \to \infty} y(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

a)

$$\text{EW: } \det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} {}^{+}-6-\lambda & {}^{-}0 & 2 \\ -9 & {}^{+}3-\lambda & 1 \\ -9 & {}^{-}0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \cancel{0 \cdot \det \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -9 & 3-\lambda \end{bmatrix}}^{\,0} + (3-\lambda)\det\begin{bmatrix} -6-\lambda & 2 \\ -9 & 3-\lambda \end{bmatrix} + \cancel{0 \det \begin{bmatrix} -6-\lambda & 2 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}}^{\,0}$$

$$= (3-\lambda)\left[\underbrace{(3-\lambda)(-6-\lambda)}_{-18} + 18\right]$$

$\underline{\lambda_1 = 3}$

$\underline{\lambda_2 = 0}$

$\underline{\lambda_3 = -3}$

EV: $(A - \lambda I)x = 0$

$$\lambda_1 = 3: \left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 0 & 2 & 0 \\ -9 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -9 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{E_3 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}}$$

$$\underline{E_0 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}}, \quad \underline{E_{-3} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}\right\}}$$

$$y(t) = c_1 e^{3t}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + c_3 e^{-3t}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$$

b) $$\lim_{t\to\infty} y(t) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \lim_{t\to\infty}\left(c_1 \underbrace{e^{3t}}_{\to\infty}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + c_3 \underbrace{e^{-3t}}_{\to 0}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ c_3 \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = c_1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix},\ c_3 \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = T z(0) = \begin{bmatrix}0 & 1 & 4\\1 & 2 & 5\\0 & 3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+4c_3\\2+5c_3\\3+6c_3\end{bmatrix},\ c_3 \in \mathbb{R}$$

Prüfung HS18:

1. [6 Punkte] In dieser Aufgabe betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) [2.5 Punkte] Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren von A.

b) [1 Punkt] Bestimmen Sie eine orthonormierte Basis zu A aus den Eigenvektoren.

c) [2.5 Punkte] Berechnen Sie die Matrix

$$e^A = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} A^n \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

~20min 3.

symmetrisch!

$$e^A = T e^D T^{-1}$$

$$e^A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{T D^k T^{-1}}{k!}$$

$$= T \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!} \right) T^{-1} = T e^D T^{-1}$$

$$D^0 + D^1 + \frac{D^2}{2} + \frac{D^3}{3!} + \dots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \emptyset \\ & 1 & \\ \emptyset & \ddots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 & & \emptyset \\ & d_2 & \\ \emptyset & \ddots & d_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d_1^2}{2} & & \emptyset \\ & d_2^2/2 & \\ \emptyset & \ddots & d_n^2/2 \end{bmatrix} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_1^k}{k!} & & \emptyset \\ & \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_2^k}{k!} & \\ \emptyset & \ddots & \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_n^k}{k!} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{d_1} & & \emptyset \\ & e^{d_2} & \\ \emptyset & \ddots & e^{d_n} \end{bmatrix} = e^D$$

a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{EW: } \det(A-\lambda I) \stackrel{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-\lambda & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] - \left[-\lambda-1\right] + \left[\lambda+1\right]$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] + 2\lambda + 2$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 4(2-\lambda) + 2\lambda + 2$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 + 6\lambda - 6$$

$$= (1-\lambda)\left[\underbrace{(2-\lambda)(1-\lambda)}_{6} - 6\right]$$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = -1$

$\lambda_3 = 4$

$$\text{EV: } (A-\lambda I)x \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda_1 = 1: \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 \in \mathbb{R} \\ x_2 = x_3 \\ x_1 = -2x_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow E_1 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= E_{-1} = \text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \quad E_4 = \text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

b) A symm. $\rightarrow E_1 \perp E_{-1} \perp E_4$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B = \{E_1, E_{-1}, E_4\}}}$$

ODER

$$\underline{\underline{T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}}}$$

c) $$e^A = T e^D T^T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4e + 2e^4 & -2e + 2e^4 & -2e + 2e^4 \\ -2e + 2e^4 & e + 3e^{-1} + 2e^4 & e - 3e^{-1} + 2e^4 \\ -2e + 2e^4 & e - 3e^{-1} + 2e^4 & e + 3e^{-1} + 2e^4 \end{bmatrix}}}$$

2. [6 Punkte] Gegeben seien

$$A = \frac{1}{15}\begin{bmatrix}-2 & -14\\ 8 & -19\\ 20 & -10\end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}.$$

a) [1 Punkt] Geben Sie die Normalgleichungen für die Matrix A und den Vektor b an.

b) [2 Punkte] Berechnen Sie die Singulärwerte von A.

Hinweis: Die Singulärwerte enthalten keine Wurzeleinträge. Dies gilt auch für die Matrizen U und V in Teilaufgabe **c)**. Falls Sie sich bei **b)** verrechnet haben, können Sie bei **c)** mit den Werten 2 und 1 rechnen.

c) [2 Punkte] Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung von A an, also $A = U\Sigma V^\top$, wobei $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

d) [1 Punkt] Bestimmen Sie ein x sodass $\|Ax-b\|_2 = \min_{v\in\mathbb{R}^2}\|Av-b\|_2$ gilt.

a) $\underline{\underline{A^TAx = A^Tb}}$ ←

~40min 4.)

$Ax = b$

$USV^Tx = b$

$S = \begin{bmatrix}\hat S\\ 0\end{bmatrix}$

$SV^Tx = U^Tb = d = \begin{bmatrix} d_0\\ \boxed{d_1}\end{bmatrix}$

$\|d_1\| = \|r\|$

Residuum = Fehler

$\hat S V^T x = d_0$

$x = V\hat S^{-1} d_0$

U, V orthogonal

$S = \mathrm{diag}(\underbrace{\sqrt{\lambda_i}}_{\sigma_i})$, λ_i EW von A^TA oder AA^T

Würde ich rechnen

U: EV von AA^T

V: EV von A^TA

$u^{(i)} = \frac{Av^{(i)}}{\sigma^{(i)}}$, $v^{(i)} = \frac{A^Tu^{(i)}}{\sigma^{(i)}}$

b)

$$V: A^TA = \frac{1}{225}\begin{bmatrix}-2 & 8 & 20\\ -14 & -19 & -10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -14\\ 8 & -19\\ 20 & -10\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{225}\begin{bmatrix}468 & -324\\ -324 & 657\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{75}\begin{bmatrix}156 & -108\\ -108 & 219\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\begin{bmatrix}52 & -36\\ -36 & 73\end{bmatrix}$$

$$\text{EW: } \det(A^TA - \lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det\left(\frac{1}{25}\begin{bmatrix}52-25\lambda & -36\\ -36 & 73-25\lambda\end{bmatrix}\right)$$

$$= \underbrace{(52-25\lambda)(73-25\lambda)}_{36^2} - \underbrace{36^2}_{(2\cdot 2\cdot 3\cdot 3)^2 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3} = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 1: \quad 27 \cdot 48 \qquad = 36^2 \checkmark \qquad \underline{\lambda_1 = 4}$

$\quad 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \qquad \underline{\lambda_2 = 1}$

$\lambda = 2: \quad 2 \cdot 23 \ \lightning \qquad \Rightarrow \underline{\underline{\sigma_1 = 2}}$

$\lambda = 3: \ (-23) \cdot (-2) \ \lightning \qquad \underline{\underline{\sigma_2 = 1}}$

$\lambda = 4: \ (-48) \cdot (-27) \quad = 36^2 \checkmark$

c) $S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\hat{S} \\ \\ \}0 \end{matrix}$

(Was auch passieren könnte, falls 1 $\sigma = 0$ wäre: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\hat{S} \\ \\ \}0 \end{matrix}$)

V:

EV: $(A^T A - \lambda I)x = 0$

$\lambda_1 = 4: \begin{array}{cc|c} -48 & -36 & 0 \\ -36 & -27 & 0 \end{array} \xrightarrow{G.} \begin{array}{cc|c} -48 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 = -\frac{3}{4} x_2 \end{matrix}$

(Zeilenoperation: $\cdot \frac{4}{3}$)

$\Rightarrow E_4 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\} = \underline{\operatorname{span}\left\{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}}$

$\lambda_2 = 1: \begin{array}{cc|c} 27 & -36 & 0 \\ -36 & 48 & 0 \end{array} \xrightarrow{G.} \begin{array}{cc|c} 27 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 = \frac{4}{3} x_2 \end{matrix}$

(Zeilenoperation: $\cdot \frac{4}{3}$)

$\Rightarrow E_1 = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right\} = \underline{\operatorname{span}\left\{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{V = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}}}$

U:

$$u^{(1)} = \frac{A v^{(1)}}{\sigma^{(1)}} = \frac{\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}}{2} = \frac{1}{150}\begin{bmatrix} -50 \\ -100 \\ -100 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

$$u^{(2)} = \frac{A v^{(2)}}{\sigma^{(2)}} = \frac{1}{75}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{75}\begin{bmatrix} -50 \\ -25 \\ 50 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$$u^{(3)} = u^{(1)} \times u^{(2)} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow U = \underline{\underline{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}}}$$

d)

$$Ax = b$$

$$USV^T x = b$$

$$S = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad SV^T x = U^T b = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{S} V^T x = d_0$$

$$x = V \hat{S}^{-1} d_0$$

$$d = U^T b = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, d_0 \\ \\ \}\, d_1 \end{matrix}$$

$$x = V \hat{S}^{-1} d_0 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -13 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 \\ -26 \end{bmatrix}}}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(Im Fall, dass ein $\sigma = 0$ ist, sprich $\hat{S}$ nicht inv.:

Pseudoinverse: $\hat{S} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \hat{S}^{+} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$)

Prüfung 2007 HE:

6.b) Die 3×4 Matrix B besitzt die Singulärwertzerlegung $B = USV^T$, mit

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 4/\sqrt{18} \\ -\frac{2}{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \\ \frac{2}{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(i) Bestimmen sie $\text{rang}(B)$

(ii) Bestimmen sie Basis für Kern & Bild von B

(i) $\text{rang}(B) = \text{rang}(S) = \underline{\underline{2}}$

(ii) Kern(B): $Bx = 0 = USV^Tx \Rightarrow V^Tx \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \star \\ \star \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \operatorname{Kern}(B) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1/6 \\ 1/2 \\ 1/6 \\ 5/6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/3 \\ -1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/3 \\ 1/3\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Bild}(B) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$$

3. [6 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & \beta & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) [1.5 Punkte] Finden Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die Spaltenvektoren von A orthogonal sind.

Im Folgenden seien α und β nun wie in Teilaufgabe **a)**.

b) [3.5 Punkte] Geben Sie eine QR-Zerlegung von A an.

Hinweis: Leider lässt sich hier $\sqrt{2}$ nicht vermeiden...

c) [1 Punkt] Berechnen Sie $|\det(A)|$.

~2-3min 1.)

a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0 = 2 + 2\beta \qquad \underline{\underline{\beta = -1}}$

$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0 = 2\alpha - 5 \qquad \underline{\underline{\alpha = \frac{5}{2}}}$

$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$

b) A ist orthogonal. finde $A = QR$. $\Rightarrow Q = A$, $R = I$

$$\underline{\underline{A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 5/\sqrt{45} & 2/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} & -2/3 \\ 2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} & 1/3 \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{45}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{R}}}$$

$Q^T A = R$

$$\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4 + 1} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{16}{4} + \frac{4}{4}} = \frac{\sqrt{45}}{2}$$

c) $|\det(A)| = |\det(Q \cdot R)| = |\underbrace{\det Q}_{\pm 1}||\det R| = |\det R| = \underline{\underline{\frac{45}{2}}}$

4. [6 Punkte] Sei $\mathcal{P}_3$ der reelle Vektorraum der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad strikt kleiner als 3. Im Folgenden betrachten wir die Mengen

$$\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\} \subseteq \mathcal{P}_3,$$
$$\mathcal{B}_2 = \{x-1, x+1, x^2-1\} \subseteq \mathcal{P}_3$$

sowie die Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, die für alle $p \in \mathcal{P}_3$, $x \in \mathbb{R}$ durch

$$[\mathcal{F}(p)](x) = p(x) - \left(\int_0^1 y\, p'(y)\,\mathrm{d}y\right) \cdot x$$

gegeben ist (wobei p' hier wie gewohnt die Ableitung von p bezeichnet).

a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

b) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix F, durch die $\mathcal{F}$ beschrieben wird, wenn wir die Basis $\mathcal{B}_1$ in $\mathcal{P}_3$ verwenden.

c) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_2$ eine Basis von $\mathcal{P}_3$ ist.

d) [1.5 Punkte] Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T für den Basiswechsel von $\mathcal{B}_2$ nach $\mathcal{B}_1$ (T überführt also Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_2$ in Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}_1$).

~20min 2.)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_3 \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "k_1"] \arrow[dd, bend right, "k_2"'] & \mathcal{P}_3 \arrow[d, "k_1"] \arrow[dd, bend left, "k_2"] \\
B_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "T^{-1}"'] & B_1 \\
B_2 \arrow[r, "Q"] \arrow[u, shift right, "T"'] & B_2 \arrow[u, "T"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \underset{k_1^{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} 1 + x + x^2$$

a) $\mathcal{F}$ ist wohldefiniert, da:

$\mathcal{F}(1) = 1 \in \mathcal{P}_3$,

$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2}x \in \mathcal{P}_3$,

$$\mathcal{F}(x^2) = x^2 - \left(\int_0^1 y[y^2]'\,dy\right)x$$
$$= x^2 - \left(\int_0^1 y\,2y\,dy\right)x$$
$$= x^2 - \left[\tfrac{2}{3}y^3\right]_0^1 x = x^2 - \tfrac{2}{3}x \in \mathcal{P}_3$$

Zeigen Linearität von $\mathcal{F}$:

$\forall a, b \in \mathcal{P}_3,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $\mathcal{F}(a+b) = \mathcal{F}(a) + \mathcal{F}(b)$

(ii) $\mathcal{F}(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \mathcal{F}(a)$

Überprüfen (i) & (ii) zusammen:

$$\mathcal{F}(a + \alpha b) \overset{!}{=} \mathcal{F}(a) + \alpha\mathcal{F}(b)$$

$$\underbrace{[a(x) + \alpha b(x)]}_{p(x)} - \left(\int_0^1 y\,\underbrace{[a(y) + \alpha b(y)]'}_{p(y)'}\,dy\right)x$$

$$= a(x) + \alpha b(x) - \left(\int_0^1 y\,(a'(y) + \alpha b'(y))\,dy \right) x$$

$$= a(x) + \alpha b(x) - \left(\int_0^1 (y a'(y) + \alpha y b'(y))\,dy \right) x$$

$$= a(x) + \alpha b(x) - \left(\int_0^1 y a'(y)\,dy + \alpha \int_0^1 y b'(y)\,dy \right) x$$

$$= \underbrace{a(x) - \left(\int_0^1 y a'(y)\,dy \right) x}_{\mathcal{F}(a)} + \underbrace{\alpha}_{\alpha} \cdot \underbrace{\left[b(y) - \left(\int_0^1 y b'(y)\,dy \right) x \right]}_{\mathcal{F}(b)} \qquad \square$$

b) $B_1 \xrightarrow{F} B_1$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_3 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k_1"] & \mathcal{P}_3 \arrow[d, "k_1"] \\ B_1 \arrow[r, "F"] & B_1 \end{tikzcd}$$

$1 \xrightarrow{F} 1 \quad = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$x \xrightarrow{F} \frac{1}{2} x \quad = 0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot x + 0 \cdot x^2$

$x^2 \xrightarrow{F} x^2 - \frac{2}{3} x = 0 \cdot 1 - \frac{2}{3} x + 1 \cdot x^2$

$$\Rightarrow F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{aligned} & x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad F \cdot x = F\left(a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ & a + bx + cx^2 \qquad = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & \qquad = \begin{bmatrix} a \\ \frac{1}{2} b - \frac{2}{3} c \\ c \end{bmatrix} = a + \left(\frac{1}{2} b - \frac{2}{3} c \right) x + c x^2 \\ & \qquad = \mathcal{F}(a + bx + cx^2) \end{aligned} \right)$$

c) $B_1 = \{1, x, x^2\} \subseteq \mathcal{P}_3$

$B_2 = \{\underset{b^{(1)}}{x-1},\ \underset{b^{(2)}}{x+1},\ \underset{b^{(3)}}{x^2-1}\} \subseteq \mathcal{P}_3$

1) $$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{b^{(2)} - b^{(1)}}{2} \\ x &= \frac{b^{(2)} + b^{(1)}}{2} \\ x^2 &= b^{(3)} + \frac{b^{(2)} - b^{(1)}}{2} \end{aligned}\right\}$$

B_2 ist ES & minimal da 3 Vektoren & $\mathcal{P}_3$ 3-dim $\rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Basis}}}$

ODER:

2) $$\begin{array}{ccc|c} b^{(1)} & b^{(2)} & b^{(3)} & \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow{G.} \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Rang 3
$\rightarrow$ lin. unabh.
ES von $\mathcal{P}_3$
$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Basis}}}$

d) $B_2 \xrightarrow{T} B_1$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_3 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k_1"] \arrow[dd, bend right, "k_2"'] & \mathcal{P}_3 \arrow[d, "k_1"'] \arrow[dd, bend left, "k_2"] \\ B_1 \arrow[r, "F"] & B_1 \\ B_2 \arrow[u, "T"] \arrow[r, "Q"] & B_2 \arrow[u, "T"'] \end{tikzcd}$$

$Q = T^{-1} F T$

$x-1 \xrightarrow{I} x-1 = -1 \cdot 1 + 1x + 0x^2$

$x+1 \xrightarrow{I} x+1 = 1 \cdot 1 + 1x + 0x^2$

$x^2-1 \xrightarrow{I} x^2-1 = -1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2$

$$\Rightarrow T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

(Falls wir Q berechnen sollten:)

$B_2 \xrightarrow{Q} B_2$:

Hier müsst ihr nichts rechnen!

	$(x-1)$	$(x+1)$	(x^2-1)
$x-1 \xrightarrow{F} \frac{1}{2}x-1 =$	- -	- - -	- -
$x+1 \xrightarrow{F} \frac{1}{2}x+1 =$	- -	- -	- - -
$x^2-1 \xrightarrow{F} x^2-\frac{2}{3}x-1 =$	- -	- -	- - -

5. [6 Punkte] Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit $\det(A) < 0$. Zeigen Sie folgenden Aussagen:

a) [1 Punkt] Mindestens ein Eigenwert von A ist strikt negativ.

b) [2 Punkte] Es gibt ein $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $x^\top A x < 0$.

c) [3 Punkte] Die Aussagen in a) und b) gelten auch für Matrizen, die nicht symmetrisch sind.

Zeit: ? Als letzes

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, symm., $\det(A) < 0$

a) $\lambda_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in (1,n)$

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_i \cdot ... \cdot \lambda_n < 0$$

$$\Rightarrow \exists i \in (1,n) : \lambda_i < 0 \quad \square$$

b) x der EV von $\lambda_i < 0$

$$x^T A x = x^T \lambda_i x = \underbrace{\lambda_i}_{<0} \underbrace{x^T x}_{\geq 0} = \underbrace{\lambda_i}_{<0} \underbrace{\|x\|^2}_{\geq 0} < 0 \quad \square$$

c) $\lambda_i \in \mathbb{C}$ nun möglich, aber

falls $\lambda_j \in \mathbb{C}$ EW von A ist, dann auch $\overline{\lambda_j}$

a)

$$\det(A) = \overbrace{\underbrace{\lambda_1 \overline{\lambda_1}}}^{>0} \cdot \overbrace{\lambda_2 \overline{\lambda_2}}^{>0} \cdot ... \cdot \overbrace{\lambda_i}^{<0} \cdot ... \cdot \overbrace{\lambda_{n/2} \overline{\lambda_{n/2}}}^{>0} < 0$$

$$(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = \|\lambda_1\|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \exists i \in (1,n) : \lambda_i < 0 \quad \square$$

b) x der EV zu $\lambda_i < 0$:

$$x^T A x = x^T \lambda_i x = \underbrace{\lambda_i}_{<0} \underbrace{\|x\|^2}_{>0} < 0 \quad \square$$